5/4/17

Στατιστικοί έλεγχοι για το Διωνυμικό p

Έστω n δοκιμές Bernoulli με $p = P(E)$, $q = 1-p = P(A)$ και X αριθμός των E στις n δοκιμές.

Εκτιμήτρια της παραμέτρου p

$X \sim B(n,p)$, $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$

$\hat{p} = \frac{X}{n}$, $E(\hat{p}) = p$, $Var(\hat{p}) = \frac{np(1-p)}{n^2} = p(1-p)/n$

$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$

Για τον έλεγχο των υποθέσεων

(i) $H_0: p \le p_0$ v $H_1: p > p_0$ (p_0 γνωστό)

(ii) $H_0: p \ge p_0$ v $H_1: p < p_0$

(iii) $H_0: p = p_0$ v $H_1: p \ne p_0$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό:

$X \sim B(n, p_0)$ όταν H_0 αληθής

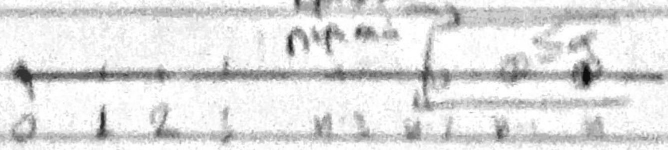
κ': κρίσιμη περιοχή μεγέθους α

- (i) $X \ge k_\alpha$
- (ii) $X \le k'_\alpha$
- (iii) $X \le k'_{\alpha/2}$ ή $X \ge k_{\alpha/2}$

$[0, k'_{\alpha/2}] \cup [k_{\alpha/2}, n]$

όπου k'_α και k_α ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος αντίστοιχα ακέραιος για τον οποίο ισχύει

Όχι ισότητα → $\sum_{x=0}^{k'_\alpha} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \le \alpha$ και $\sum_{x=k_\alpha}^{n} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \le \alpha$



$X \sim B(n, p_0)$

$X \sim B(n,p) \Rightarrow X \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(np, np(1-p)) \Rightarrow$

$\hat{p} = \frac{X}{n} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ Δ.Ε. για p: $\boxed{\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$

$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$ όταν H_0 αληθές

και κρίσιμες περιοχές μεγέθους α

$u - L = 2w$

$= 2 z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \rightarrow \boxed{n = \hat{p}(1-\hat{p}) \frac{z^2_{\alpha/2}}{w^2}}$

$\hat{p}(1-\hat{p}) \leq \frac{1}{4}$

$n \leq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2w}\right)^2$

Παράδειγμα

$H_0: p = \frac{1}{3}$ v $H_\alpha: p > \frac{1}{3}$, $X \geq k_{0.05} (=7)$

$X \sim B(n, \frac{1}{3})$

$P(X=10) = 0.000017$
$P(X=9) = 0.000336$
$P(X=8) = 0.0003027$
$P(X=7) = 0.0161668$
$P(X=6) = 0.056678$

$P(X \geq 7) = 0.019548 \leq 0.05 (=\alpha)$

$P(X \geq 6) = 0.076233 > 0.05$

Παράδειγμα 4.4

$n=2789$, $X=2431$, $p=$ ποσ. φυσ., $\hat{p}=\frac{X}{n}=0.872$, $1-\hat{p}=0.128$

$\hat{\sigma}_{\hat{p}}=\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}=0.006$ κ' $Z_{0.025}=1.96$

95% ΔΕ για το p: $\hat{p}\pm Z_{a/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \rightsquigarrow [l,u]$ $[0,86,\ 0,884]$

$H_0: p=0.9$ v $H_a: p\neq 0.9$, $|Z|\geq Z_{a/2}\ (=Z_{0.025}=1.96)$

$$Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}=\frac{0.872-0.9}{\sqrt{0.9(1-0.9)/2789}}=-4.91$$

Επειδή $4.91>1.96$ απρ. H_0

Τιμή P: $P(|Z|\geq 4.91 \mid Z\sim N(0,1))=2\cdot P(Z\geq 4.91)$
$\simeq 0<0.05$ απρ. H_0

Συμπερασματολογία για τη διαφορά 2 ποσοστών (Πισ [illegible])

(Α) Σύγκριση δύο ποσοστών κατά ζεύγη - Τεστ του McNemar

Παράδειγμα 4.9

A	+	+	−	−	
B	+	−	+	−	
Σύνολο	25	14	4	17	60

		B: +	B: −	Σύνολο
A	+	25	14	39
A	−	4	17	21
Σύνολο		29	31	60

Γενικά: Τα μέλη ενός πληθυσμού υποβάλλονται σε δύο δοκιμασίες με σκοπό τη σύγκριση της αποτελεσματικότητάς τους. Έστω p_1 κ' p_2 οι άγνωστες πιθανότητες ποσοστά επιτυχίας των δοκιμασιών 1 κ' 2 αντίστοιχα. Στόχος μας είναι ο έλεγχος κ' $H_0: p_1 = p_2$. N μέλη του πληθυσμού επιλέγονται τυχαία και το κάθε μέλος υποβάλλεται στις δοκιμασίες 1 κ' 2.

Δοκιμασία 1	Δοκιμασία 2	Αριθμός μελών
E	E	X
E	A	Y
A	E	Z
A	A	W
		N

Δοκ. 1 \ Δοκ. 2	E	A	Σύνολο
E	X	Y	X+Y
A	Z	W	Z+W
Σύνολο	X+Z	Y+W	N

$$\hat{p}_1 = \frac{X+Y}{N} \qquad \hat{p}_2 = \frac{X+Z}{N}$$

$X+Y \sim B(N, p_1) \Rightarrow E(X+Y) = N \cdot p_1$
$X+Z \sim B(N, p_2) \Rightarrow E(X+Z) = N \cdot p_2$

Έτσι, η $E(X) + E(Y) = N p_1$ κ' $Np_1 = Np_2$ όταν H_0 αληθής
κ' $E(X) + E(Z) = N \cdot p_2$

Άρα, $E(Y) = E(Z)$ όταν H_0 αληθεύει
Αν τώρα, $Y + Z = n$

Αν τώρα $Y+Z=n$ τότε $Y \sim B(n, \frac{1}{2})$

άρα, $M = \dfrac{Y-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}/2} \sim N(0,1)$ όταν Ho αληθής

Καλύτερα: $M = \dfrac{Y-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{n}/2}$ όταν $Y > \frac{n}{2}$

$= \dfrac{Y-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{n}/2}$ όταν $Y < \frac{n}{2}$

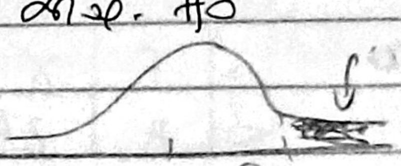
Πρόβλημα

$n = 14+4 = 18$, $Y = 14 \ (=y)$

Λύση

$M = \dfrac{14-\frac{18}{2}}{\sqrt{18}/2} = 2.36 > Z_{0.025} = 1.96$ απορρίπτεται Ho

$M = \dfrac{14-\frac{18}{2}}{\sqrt{18}/2} = 2.12 > Z_{0.025} = 1.96$ απορ. Ho



Τιμή p: $p = 2P(|M| \geq 2.36) = 2 * 0.091 = 0.0182 \ (< 0.05)$ απορ. Ho.

$p = P(|M| \geq 2.12) = 2 * 0.017 = 0.034 \ (< 0.05)$ απορ. Ho